Examen de l'optique quantique
Durée: 2h

Exercice 1:

On considère les états propres de l'opérateur annihilation $\hat{a}$:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad \alpha \in C.$$

Les états $|\alpha\rangle$ sont appelés des états cohérents. On développe $|\alpha\rangle$ sur la base des vecteurs propres de $\hat{H}$:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n|n\rangle, \quad n \in N$$

1. Etablir la relation de récurrence vérifiée par les coefficients c_n. Déterminer alors les coefficients c_n, en fonction de c_0, n et α.
2. Déterminer la valeur de c_0 pour que l'état $|\alpha\rangle$ soit normé. La famille des vecteurs $|\alpha\rangle$ est elle orthogonale? Que représente le ket $|\alpha = 0\rangle = |0\rangle$?
3. Calculer les valeurs moyennes des opérateurs $\hat{X}$, $\hat{P}$ et $\hat{H}$ dans un état cohérent, avec $\hat{X} = \sqrt{\hbar/2mw}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$ et $\hat{P} = i\sqrt{m\hbar w/2}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$. De même, calculer dans le même état, les valeurs moyennes $\hat{X}^2$ et $\hat{P}^2$.
4. Calculer $\Delta X \Delta P$ et conclure.

Exercice 2:

Considérons un atome à deux niveaux, $|e\rangle$ et $|g\rangle$, séparés d'une énergie $\hbar w_a$, que l'on place dans une cavité Fabry-Pérot résonnante pour un mode du champ électromagnétique de fréquence $w_L \simeq w_a$. On admet que le hamiltonien du système couplé atome-champ peut se mettre sous la forme

$$\hat{H} = \hbar w_a |e\rangle\langle e| + \hbar w_L(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}) + \hbar\Omega(|e\rangle\langle g| \otimes \hat{a} + |g\rangle\langle e| \otimes \hat{a}^\dagger).$$

Il s'agit du hamiltonien de Jaynes-Cummings, où $\hat{a}^\dagger$ et $\hat{a}$ sont les opérateurs création et annihilation de l'oscillateur harmonique fictif représentant le champ électromagnétique et où est pris réel.

1. Interpréter les différents termes de $\hat{H}$.
2. Rappeler l'action des opérateurs création et annihilation sur les états $|n\rangle$.
3. Déterminer l'action de $\hat{H}$ sur les états $|e, n\rangle = |e\rangle \otimes |n\rangle$ et $|g, n\rangle = |g\rangle \otimes |n\rangle$, et en déduire que pour tout n, $\hat{H}$ laisse stable le sous-espace ε_n engendré par $|e, n\rangle$ et $|g, n+1\rangle$.
4. En déduire les vecteurs propres et les énergies propres de $\hat{H}$ dans le cas où $w_L = w_a$, condition que l'on supposera satisfaite dans la suite.
5. A $t = 0$, on prépare l'atome dans l'état $|e\rangle$, le champ électromagnétique étant vide de photons (état $|n = 0\rangle$). Quel est l'état du système à un instant $t > 0$?. En déduire la probabilité $P_e(t)$ de trouver l'atome dans l'état $|e\rangle$ à l'instant t.
6. L'état initial du champ est à présent supposé de la forme $\sum_n c_n|n\rangle$. Quelle est la probabilité $P_e(t)$ de trouver le système dans l'état $|e\rangle$ à un instant t ? Donner en particulier les fréquences de Fourier de $P_e(t)$.